Die Frage der Waage

"Wir haben 12 Kugeln, die alle dasselbe Aussehen haben, nur eine ist entweder schwerer oder leichter als die anderen. Welche dies ist, kann man mit drei Wägungen auf einer Balkenwaage herausfinden."

http://de.math.wikia.com/wiki/Waage_und_12_Kugeln,_L%C3%B6sung
http://www.karsten-koechlin.de/sonstiges/raetsel/12_kugeln.pdf
http://stud-in.fh-swf.de/Philipp.Schwedes/kugelproblem.htm
http://www.brodo.de/pub/kugelproblem.pdf

Wohl sind die unter obigen Links versammelten Beweise und Lösungen bekannt. So also auch, dass es andere Wege als den im Folgenden gezeigten gibt. Dieser aber soll sich auszeichnen durch Verständlichkeit für den Laien.
Sowie das Prinzip erklären - womit die Antwort gegeben wird für 4,5,6… Wägungen, letztlich beliebig viele.

0	**Zunächst versuchen fast alle es "von oben", mit großen Paketen, merken schnell, dass das nicht genug klärt:**
1	6 gegen 6, zwar sind alle Kugeln anschließend charakterisiert als potentiell leichte oder potentiell schwere. Aber es gibt keine einzige auszuschließen.
2	5 gegen 5, dass gibt ähnlich wenig Ergebnis.
3	**Genauso ist es mit den kleinen Mengen "von unten", auch hier wird ohne weiteres jedem klar, dass eine erste Wägung nicht genug klärt.**
4	1 gegen 1, da müsste schon viel Glück walten…
5	2 gegen 2, das ergibt kaum mehr: bleiben doch noch 2 weitere solche 2er Paare übrig und nichts ist gewonnen.
6	**Interessant erscheinen die Möglichkeiten dazwischen.**
7	3 gegen 3: Verlockend für den Fall des Ungleichgewichts, fehlt doch nur die Art der Abweichung festzustellen und dann kann aus 3 Kugeln leicht die eine bestimmt werden. Doch zuviele Kugeln bleiben ohne Eigenschaft.
8	4 gegen 4: Das scheint am besten, keine Kugel bleibt ohne Eigenschaft und alle drei Pakete sind gleich groß. 2 Fälle sind zu unterscheiden:
9	Ungleichgewicht: Es gibt 4 Kugeln, deren jede möglicherweise leichter ist, 4 potentiell schwerere Kugeln und 4 gewiß normalgewichtige.
10	Gleichgewicht: Es gibt 4 Kugeln, deren jede möglicherweise leichter oder schwerer ist, und 8 gewiß normalgewichtige.
11	**Und nun?**
12	**Fangen wir von der anderen Seite, von unten an und mit der umgekehrten Frage:**
13	**Wir dürfen ein(- oder zwei)mal wiegen, aus wievielen Kugeln finden wir die eine unterschiedliche heraus?**

14	**Jetzt heißt es Fälle unterscheiden:**
15	**Wir wissen noch gar nichts weiter, außer, dass eine abweicht.**
16	**Dann hat die Frage überhaupt erst bei 3 Kugeln Sinn, das ist klar.**
17	Und wenn wir beides herausfinden wollen, welche Kugel abweicht und die Art ihrer Abweichung, dann brauchen wir bei 3 Kugeln bereits 2 Wägungen.
18	**Wir wissen bereits etwas, das ist bei wenigen Kugeln, die von einer Aufgabe mit vielen übrigbleiben, gut denkbar.**
19	**Wir wissen die Art der Abweichung.**
20	Dann kann man auf unterster Stufe mit einer Wägung die eine aus 3 Kugeln herausfinden:
21	1 gegen 1, und entweder die Abweichlerin offenbart sich auf der Waage, oder sie liegt als dritte daneben.
22	Und leicht einsehbar ist, dass man mit 2 Wägungen 9 Kugeln bewältigt:
23	3 gegen 3, und entweder die 3er-Gruppe mit der Abweichlerin offenbart sich auf der Waage, oder sie liegt als dritte daneben. So ist ein 3er-Paket für die letzte Übung bereit. Wir stoßen auf die Einsicht aus Zeile **7**.
24	Usw, die Reihe wird fortgesetzt, mit 3 Wägungen sind 27 Kugeln zu schaffen, mit 4 dann 81, …die Reihe der 3er-Potenzen!
25	**Wir wissen zwar nicht die Art, haben aber genug neutrale Kugeln zur Verfügung.**
26	Dann kann man auf unterster Stufe mit einer Wägung die Art der Abweichung genau von nur einer Kugel herausfinden:
27	1 gegen 1, und die Abweichlerin offenbart die Art.
28	Und mit 2 Wägungen?
29	Entweder, die erste offenbart die Art der Abweichung, dann befindet man sich im Fall von Zeile **19ff** und hier dürfen also **3** Kugeln beteiligt sein.
30	Oder, die erste zeigt nicht die Art, aber die Identität der Abweichler(in), das darf für die zweite und letzte Wägung also nur 1 Kugel sein.
31	Zusammen sind das 4! 4 als 3+1 aufzufassen! Wir stoßen auf die Zahl aus Zeile **8**.
32	3 Kugeln von 4 gegen 3 neutrale und im Ungleichgewichts-Fall offenbart sich die Art, es geht also mit Zeile **21** weiter, oder im zweiten Fall des Waagen-Gleichgewichts bleibt die eine identifiziert und die Art wird wie in Zeile **27** geklärt.
33	**Nun haben wir bereits die Lösung für den Fall aus Zeile 10.**
34	´- Indem wir erkannt haben, dass die 4 als 3 plus 1 aufzufassen geht:
35	**Im Fall von Zeile 9 gehen wir weiter wie folgt:**
36	Wir platzieren 3 von den potentiell leichten gegen 3 neutrale und legen 3 potenziell schwere auf die Seite. Nun haben wir etwas verändert den Fall aus Zeile 23. So weit so gut, aber es bleiben drei übrig, je eine von jedem 4er-Paket!
37	1 neutrale, die macht naturgemäß keine Sorgen.

38	Aber je 1 potenziell leichte und 1 potenziell schwere Kugel müssen in diesem Wiegegang mittun, so platzieren wir sie kreuzweise!
39	Nun zeigt der Gleichstand deutlich auf die beiseite gelegte 3er-Gruppe, das geht bekannt weiter.
40	Das eine Ungleichgewicht zeigt nun klar auf die gewogene unneutrale 3er-Gruppe, auch das geht bekannt weiter.
41	Das andere Ungleichgewicht zeigt auf die kreuzweise gelegten 2.
42	Und hier ist mit einer Variante von Zeile 26ff durch eine 3. Wägung von einer der beiden gegen eine neutrale auch alles geklärt!
43	**Doch weiter in Zeile 32:**
44	**Wir wissen zwar nicht die Art, haben aber genug neutrale Kugeln zur Verfügung und haben 3 Wägungen:**
45	Eine Stufe weiter: Aus der 3 werden 9 und aus der 1 werden 1+3=4:
46	Zusammen sind das 13!
47	9 Kugeln von 13 gegen 9 neutrale:
48	Im Fall des Waagen-Ungleichgewichts offenbart sich die Art der Abweichung, es geht also weiter mit Zeile 23.
49	Oder im Fall des Waagen-Gleichgewichts bleibt ein 4er Paket identifiziert und weiter geht es wie in Zeile 32.
50	Noch eine weitere Stufe: Aus der 9 werden 27 und aus der 1+3=4 werden 1+3+9=13, zusammen sind es 40.
51	Usw, die Reihe wird also fortgesetzt, mit 4 Wägungen sind 40 Kugeln zu schaffen, mit 5 dann 121, …die Summen der Reihe der 3er-Potenzen!
52	**Bleibt noch die Haupt-Frage zum allgemeinen erweitert:**
53	**Aus maximal wieviel Kugeln kann man mit wieviel Wägungen die eine Abweichlerin finden?**
54	Wie in Zeile 17 beschrieben: für 3 Kugeln braucht es bereits 2 Wägungen. Und umgekehrt kann man mit diesen 2 Wägungen mehr Kugeln nicht bewältigen! (Gäbe es neutrale Kugeln dazu, wären es 4 Kugeln, immerhin. Zeile 32)
55	Wie insgesamt gezeigt, kann man mit 3 Wägungen maximal 12 Kugeln fassen. (Gäbe es neutrale dazu, wären es 13, Zeile 46ff.)
56	Wie in Zeile 50 gezeigt, kann man - gibt es neutrale dazu - mit 4 Wägungen maximal 40 Kugeln fassen. Sonst nur 39, eine weniger:
57	Man beginnt hier mit 13 gegen 13. Wie im Fall der 12 mit je einem Drittel.
58	Und es geht grad genauso weiter, nur werden die 3 von Zeile 35ff durch 9 ersetzt und kreuzweis je 4 statt 1 Kugeln platziert.
59	Usw, die Reihe wird also fortgesetzt, mit 5 Wägungen sind 120 Kugeln zu schaffen, mit 6 dann 363, mit 7 gar 1092 …die Summen der Reihe der 3er-Potenzen ab 3!
60	**Im allgemeinen also gilt, dass eine einzelne Abweichlerin aus einer bestimmten Menge Kugeln mit so viel Wägungen herauszufinden ist, wie aus der nächstgrößeren Summe der Dreierpotenzen.**